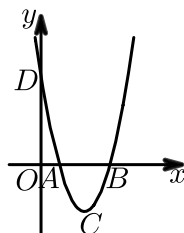


第3讲二次函数与角度存在性（练习）

一、定角问题

1. 如图，在平面直角坐标系中，二次函数 $y = ax^2 + bx + 6$ 的图象交 x 轴于 A 、 B 两点，交 y 轴于点 D ，点 C 为抛物线的顶点，且 A 、 B 两点的横坐标分别为1和3。



- (1) 写出 A 、 B 两点的坐标。
(2) 求二次函数的解析式。
(3) 在(2)的抛物线上，是否存在一点 P ，使得 $\angle BAP = 45^\circ$ ？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】 (1) $A(1, 0)$ ， $B(3, 0)$ 。

(2) $y = 2x^2 - 8x + 6$ 。

(3) 存在， $P\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 。

【解析】 (1) $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + 6$ 的图象交 x 轴于 A 、 B 两点，
且 A 、 B 两点的横坐标分别为1和3，

$\therefore A(1, 0)$ ， $B(3, 0)$ 。

(2) 由(1)知， $A(1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ，

$\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + 6$ 的图象交 x 轴于 A 、 B 两点，

$$\therefore \begin{cases} a + b + 6 = 0 \\ 9a + 3b + 6 = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \end{cases}$$

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y = 2x^2 - 8x + 6$ 。

(3) 假设存在点 P ，设直线 AP 的解析式为 $y = mx + n$ ，

$\because \angle BAP = 45^\circ$ ，

$\therefore |m| = 1$ ，

当点 P 在 x 轴上方时， $m = 1$ ，

$$\therefore A(1, 0),$$

$$\therefore \text{直线} AP \text{的解析式为} y = x - 1 \text{①},$$

$$\therefore \text{点} P \text{在抛物线} y = 2x^2 - 8x + 6 \text{②上},$$

$$\therefore \text{联立①②得} \begin{cases} y = x - 1 \\ y = 2x^2 - 8x + 6 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (舍去) 或 } \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases},$$

$$\therefore P\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right),$$

$$\text{当点} P \text{在} x \text{轴下方时}, m = -1,$$

$$\therefore A(1, 0),$$

$$\therefore \text{直线} AP \text{的解析式为} y = -x + 1 \text{③},$$

$$\text{联立②③得} \begin{cases} y = -x + 1 \\ y = 2x^2 - 8x + 6 \end{cases},$$

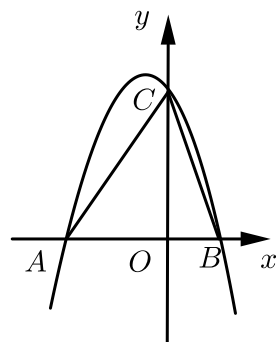
$$\therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (舍) 或 } \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\therefore P\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right),$$

$$\text{即: } P\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ 或 } \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

2. 如图, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A, B , 与 y 轴交于点 C , 且 $OA = OC$, $\tan \angle ABC = 3$, $CB = \sqrt{10}$, 点 P 在抛物线的对称轴上.



(1) 求抛物线的解析式.

(2) 当直线 AP 与直线 AC 的夹角为 15° 时, 求出直线 AP 的解析式.

【答案】 (1) $y = -x^2 - 2x + 3$.

(2) $y = \sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$ 或 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$.

【解析】(1) 设 $OA = OC = 3k (k > 0)$,

$$\therefore \tan \angle ABC = \frac{OC}{OB} = 3,$$

$$\therefore OB = k,$$

$$\text{在 Rt}\triangle OBC \text{ 中, } BC^2 = OB^2 + OC^2,$$

$$\text{则 } (3k)^2 + k^2 = (\sqrt{10})^2,$$

$$\text{得 } k = 1,$$

$$\therefore OC = 3, OB = 1,$$

$$\therefore B(1, 0), C(0, 3), A(-3, 0),$$

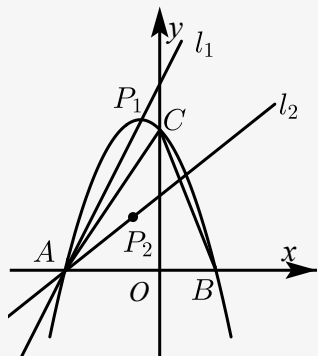
把 A 、 B 、 C 三点代入 $y = ax^2 + bx + c$ 得:

$$\begin{cases} 0 = a + b + c \\ 3 = c \\ 0 = 9a - 3b + c \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\therefore y = -x^2 - 2x + 3.$$

(2) ①如图, 当 AP 在 AC 上方时, 由①得, $\triangle AOC$ 为等腰直角三角形,



$$\therefore \angle CAO = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle P_1AO = 60^\circ,$$

$$\therefore k_{AP_1} = \tan 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\text{设 } AP_1 \text{ 的直线 } l_1 \text{ 为 } y = \sqrt{3}x + b,$$

$$\text{代入 } A(-3, 0),$$

$$\text{得: } b = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore y = \sqrt{3}x + 3\sqrt{3}.$$

②当 AP 在 AC 下方时, 设直线 AP 为 l_2 ,

$$\text{则 } \angle P_2AB = 30^\circ,$$

$$\therefore k_{AP_2} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{设 } AP_2 \text{ 的直线为 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b,$$

$$\text{代入 } A(-3, 0),$$

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle BEG,$$

$$EG = CD = \sqrt{2}, BE = BC = 3\sqrt{2}, \angle DBG = 135^\circ,$$

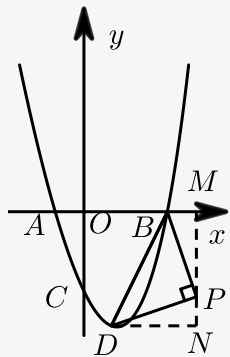
$$\therefore G(3 - \sqrt{2}, 3\sqrt{2}),$$

$$\text{又 } B(3, 0),$$

$$\therefore BF: y = -3x + 9,$$

$$\therefore \begin{cases} y = -3x + 9 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases} \Rightarrow F(-4, 21).$$

方法二：也可构造如图所示辅助线， $\triangle BDP$ 为等腰直角三角形，利用 $\triangle DNP \cong \triangle PMB$.



可求得 P 点坐标，求解即可 .

【标注】【知识点】象限内坐标的特征

【知识点】二次函数一般式

【知识点】二次函数与角度问题

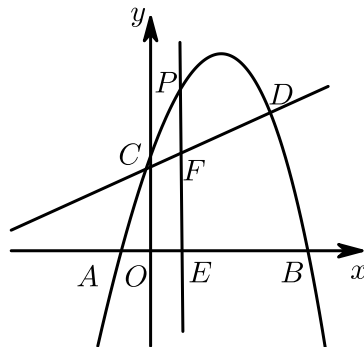
【知识点】勾股定理的综合应用

【知识点】勾股定理

【能力】运算能力

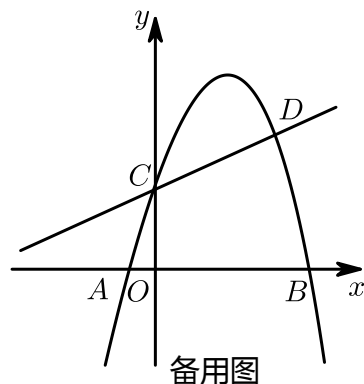
【思想】函数思想

4. 如图，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 交于 C 、 D 两点，其中点 C 在 y 轴上，点 D 的坐标为 $(3, \frac{7}{2})$. 点 P 是 y 轴右侧的抛物线上一动点，过点 P 作 $PE \perp x$ 轴于点 E ，交 CD 于点 F .



(1) 求抛物线的解析式.

(2) 若存在点 P , 使 $\angle PCF = 45^\circ$, 请直接写出相应的点 P 的坐标.



【答案】(1) 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + \frac{7}{2}x + 2$.

(2) $P_1(\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$, $P_2(\frac{23}{6}, \frac{13}{18})$.

【解析】(1) $\because$ 直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 经过点 C ,

$\therefore C(0, 2)$

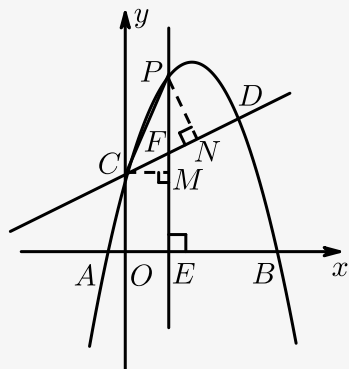
$\because$ 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过点 $C(0, 2)$, $D(3, \frac{7}{2})$,

$$\therefore \begin{cases} 2 = c \\ \frac{7}{2} = -3^2 + 3b + c \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = \frac{7}{2} \\ c = 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + \frac{7}{2}x + 2$.

(2) 如图, 当点 P 在 CD 上方且 $\angle PCF = 45^\circ$ 时,



答图 2

作 $PM \perp CD$, $CN \perp PF$

则 $\triangle PMF \sim \triangle CNF$,

$$\therefore \frac{PM}{MF} = \frac{CN}{FN} = \frac{m}{\frac{1}{2}m} = 2,$$

$$\therefore PM = CM = 2CF,$$

$$\therefore PF = \sqrt{5}FM = \sqrt{5}CF = \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{2}CN = \frac{5}{2}CN = \frac{5}{2}m.$$

$$\text{又} \because PF = -m^2 + 3m,$$

$$\therefore -m^2 + 3m = \frac{5}{2}m,$$

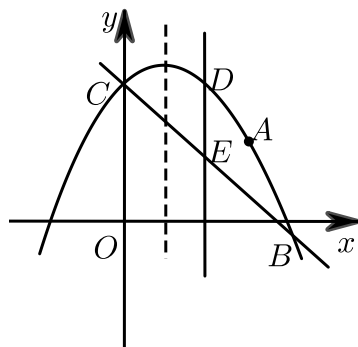
$$\text{解得: } m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = 0 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore P\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

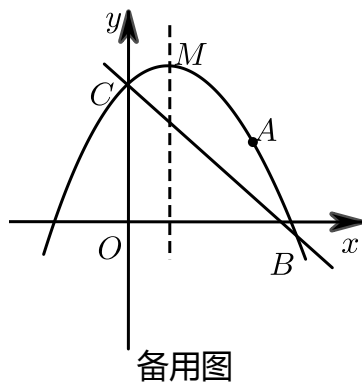
$$\text{同理可以求得: 另外一点为 } P\left(\frac{23}{6}, \frac{13}{18}\right).$$

【标注】【知识点】二次函数与相似三角形结合

5. 如图, 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 过点 $A(3, 2)$, 且与直线 $y = -x + \frac{7}{2}$ 交于 B 、 C 两点, 点 B 的坐标为 $(4, m)$.



- (1) 求抛物线的解析式.
- (2) 点 D 为抛物线上位于直线 BC 上方的一点, 过点 D 作 $DE \perp x$ 轴交直线 BC 于点 E , 点 P 为对称轴上一动点, 当线段 DE 的长度最大时, 求 $PD + PA$ 的最小值.
- (3) 设点 M 为抛物线的顶点, 在 y 轴上是否存在点 Q , 使 $\angle AQM = 45^\circ$? 若存在, 求点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{2}$.

$$(2) \frac{3}{2}\sqrt{5}.$$

$$(3) \text{存在}, (0, 2 + \sqrt{3}) \text{或} (0, 2 - \sqrt{3}).$$

【解析】(1) 将点B的坐标(4, m)代入 $y = -x + \frac{7}{2}$,

$$m = -4 + \frac{7}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore B \text{的坐标为} \left(4, -\frac{1}{2}\right),$$

$$\text{将} A(3, 2), B\left(4, -\frac{1}{2}\right) \text{代入} y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c,$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \times 3^2 + 3b + c = 2 \\ -\frac{1}{2} \times 4^2 + 4b + c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{解得} b = 1, c = \frac{7}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式} y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{2}.$$

$$(2) \text{设} D\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + m + \frac{7}{2}\right), \text{则} E\left(m, -m + \frac{7}{2}\right),$$

$$DE = \left(-\frac{1}{2}m^2 + m + \frac{7}{2}\right) - \left(-m + \frac{7}{2}\right)$$

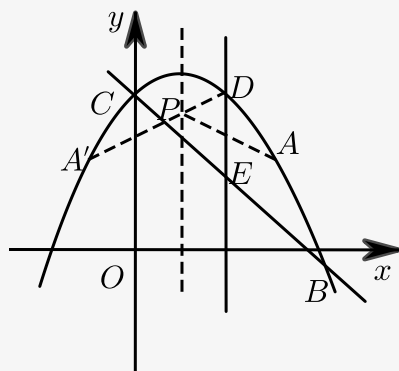
$$= -\frac{1}{2}m^2 + m + \frac{7}{2} + m - \frac{7}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}m^2 + 2m = -\frac{1}{2}(m-2)^2 + 2,$$

$$\therefore \text{当} m = 2 \text{时}, DE \text{有最大值为} 2,$$

$$\text{此时} D\left(2, \frac{7}{2}\right),$$

作点A关于对称轴的对称点A', 连接A'D, 与对称轴交于点P,



$$PD + PA = PD + PA' = A'D, \text{此时} PD + PA \text{的值最小},$$

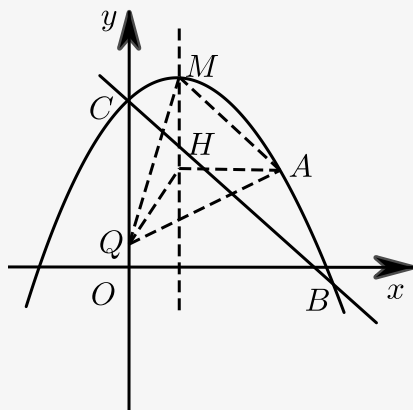
$$\because A(3, 2), \text{对称轴为直线} x = 1,$$

$$\therefore A'(-1, 2),$$

$$A'D = \sqrt{(-1-2)^2 + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5},$$

$$\text{即} PD + PA \text{的最小值为} \frac{3}{2}\sqrt{5}.$$

$$(3) \text{作} AH \perp \text{对称轴于点} H, \text{连接} AM, AQ, MQ, HQ,$$



$\therefore$ 抛物线的解析式 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{2}$,

$\therefore M(1, 4)$,

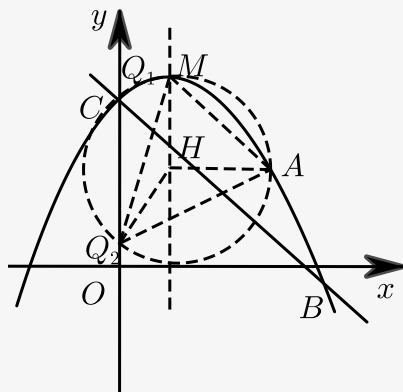
$\therefore A(3, 2)$,

$\therefore AH = MH = 2$, $H(1, 2)$

$\therefore \angle AQM = 45^\circ$, $\angle AHM = 90^\circ$,

$\therefore \angle AQM = \frac{1}{2} \angle AHM$,

可知 $\triangle AQM$ 外接圆的圆心为 H ,



$\therefore QH = HA = HM = 2$,

设 $Q(0, t)$,

则 $\sqrt{(0-1)^2 + (t-2)^2} = 2$,

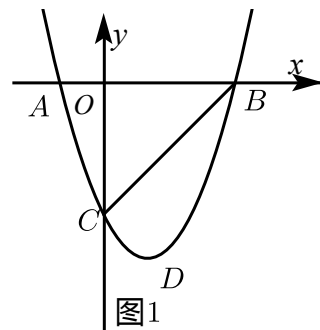
$t = 2 + \sqrt{3}$ 或 $2 - \sqrt{3}$,

$\therefore$ 符合题意的点 Q 的坐标 : $Q_1(0, 2 + \sqrt{3})$ 、 $Q_2(0, 2 - \sqrt{3})$.

【标注】【知识点】二次函数与角度问题；瓜豆原理（轨迹与最值）：轨迹为其他

二、等角问题

如图，抛物线与 x 轴交于点 A 、 $B(3,0)$ ，与 y 轴交于点 C ，其顶点 D 的坐标为 $(1,-4)$ ， P 为抛物线上 x 轴下方一点。



(1) 求抛物线的解析式。

(2) 若 $\angle PCB = \angle ACB$ ，求点 P 的坐标。

【答案】 (1) $y = x^2 - 2x - 3$ 。

(2) $P\left(\frac{5}{3}, -\frac{32}{9}\right)$ 。

【解析】 (1) 设 $y = a(x-1)^2 - 4$ ，

将 $(3,0)$ 代入解得 $a = 1$ ，

$$\therefore y = x^2 - 2x - 3,$$

故答案为： $y = x^2 - 2x - 3$ 。

(2) 过点 B 作 $BM \perp AB$ 交 CP 延长线于点 M ，

则 $\triangle ABC \cong \triangle MBC$ (SAS)，

$$\therefore BM = AB = 4,$$

$$\therefore M(3, -4),$$

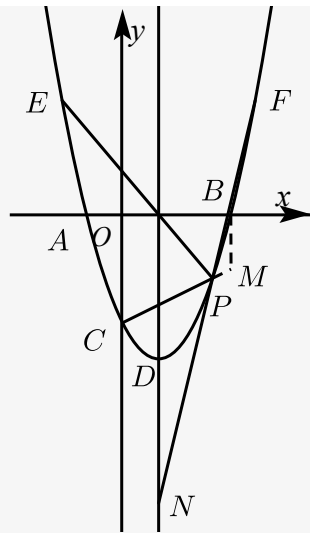
$$\therefore y_{CM} = -\frac{1}{3}x - 3,$$

$$\text{由} \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

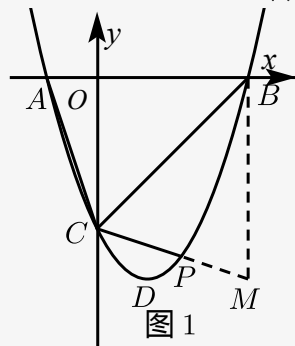
$$\text{得} \begin{cases} x_1 = \frac{5}{3} \\ y_1 = -\frac{32}{9} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = -3 \end{cases} (\text{舍}),$$

$$\therefore P\left(\frac{5}{3}, -\frac{32}{9}\right),$$

故答案为： $P\left(\frac{5}{3}, -\frac{32}{9}\right)$ 。



如图1，过点B作 $BM \parallel y$ 轴交 CP 延长线于点M，



$$\because y = 0 \text{ 时}, x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = -1, x_2 = 3$$

$$\therefore A(-1, 0), AB = 3 - (-1) = 4.$$

$$\because x = 0 \text{ 时}, y = x^2 - 2x - 3 = -3,$$

$$\therefore C(0, -3),$$

$$\therefore OB = OC = 3,$$

$$\therefore \angle OCB = \angle OBC = 45^\circ.$$

$$\because OC \parallel BM,$$

$$\therefore \angle MBC = \angle OCB = \angle OBC = 45^\circ.$$

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle MBC$ 中

$$\begin{cases} \angle ABC = \angle MBC \\ BC = BC \\ \angle ACB = \angle MCB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle MBC (\text{ASA}),$$

$$\therefore BM = AB = 4,$$

$$\therefore M(3, -4),$$

$$\text{设直线 } CM \text{ 解析式为 } y = cx - 3,$$

$$\therefore 3c - 3 = -4, \text{ 解得: } c = -\frac{1}{3},$$

$$\therefore \text{直线 } CM: y = -\frac{1}{3}x - 3.$$

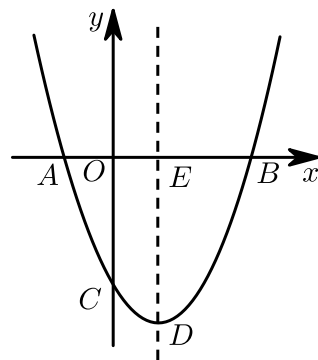
$$\therefore \begin{cases} y = \frac{1}{3}x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = -3 \end{cases} \text{ (即点 } C) \begin{cases} x_2 = \frac{5}{3} \\ y_2 = \frac{32}{9} \end{cases},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 为 } \left(\frac{5}{3}, -\frac{32}{9} \right).$$

【标注】【题型】题型：动直线（线段）与定抛物线交点问题

7. 如图，抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于点 C ，其对称轴交抛物线于点 D ，交 x 轴于点 E ，已知 $OB = OC = 6$ 。



- (1) 求抛物线的解析式及点 D 的坐标。
 (2) 连接 BD ， F 为抛物线上一动点，当 $\angle FAB = \angle EDB$ 时，求点 F 的坐标。

【答案】 (1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$ ， $(2, -8)$ 。

(2) $\left(7, \frac{9}{2}\right)$ 或 $\left(5, -\frac{7}{2}\right)$ 。

【解析】 (1) $\because OB = OC = 6$,

$$\therefore B(6, 0), C(0, -6),$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{2} \times 6^2 + 6b + c = 0 \\ c = -6 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b = -2 \\ c = -6 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 8,$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } (2, -8).$$

(2) 如图，过 F 作 $FG \perp x$ 轴于点 G ，

$$\text{设 } F\left(x, \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6\right), \text{ 则 } FG = \left| \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 \right|,$$

在 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$ 中, 令 $y = 0$ 可得
 $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$, 解得 $x = -2$ 或 $x = 6$,

$$\therefore A(-2, 0),$$

$$\therefore OA = 2, \text{ 则 } AG = x + 2,$$

$$\therefore B(6, 0), D(2, -8),$$

$$\therefore BE = 6 - 2 = 4, DE = 8,$$

当 $\angle FAB = \angle EDB$ 时, 且 $\angle FGA = \angle BED$,

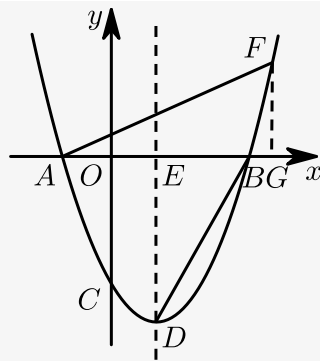
$$\therefore \triangle FAG \sim \triangle BDE,$$

$$\therefore \frac{FG}{BE} = \frac{AG}{DE}, \text{ 即 } \frac{\left| \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 \right|}{x + 2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

当点 F 在 x 轴上方时, 则有 $\frac{\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6}{x + 2} = \frac{1}{2}$, 解得 $x = -2$ (舍去) 或 $x = 7$,
 此进 F 点坐标为 $\left(7, \frac{9}{2}\right)$.

当点 F 在 x 轴下方时, 则有 $\frac{\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6}{x + 2} = -\frac{1}{2}$, 解得 $x = -2$ (舍去) 或
 $x = 5$, 此进 F 点坐标为 $\left(5, -\frac{7}{2}\right)$.

综上所述可知 F 点的坐标为 $\left(7, \frac{9}{2}\right)$ 或 $\left(5, -\frac{7}{2}\right)$.

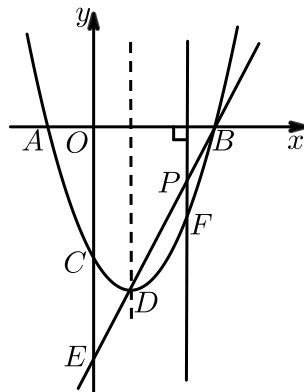


【标注】【题型】 题型：二次函数与相似三角形结合

8. 抛物线 $y = x^2 - bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D , 直线 BD 与 y 轴交于点 E .

(1) 求顶点 D 的坐标.

(2) 如图, 设点 P 为线段 BD 上一动点 (点 P 不于点 B 、 D 重合), 过点 P 作 x 轴的垂线与抛物线交于点 F . 求 $\triangle BDF$ 的面积最大值.



(3)

点 Q 在线段 BD 上, 当 $\angle BDC = \angle QCE$ 时, 求点 Q 的坐标. (直接写出结果, 不必写解答过程).

【答案】(1) $(1, -4)$.

(2) 1.

(3) $\left(\frac{9}{7}, -\frac{24}{7}\right)$.

【解析】(1) $\because$ 抛物线 $y = x^2 - bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} (-1)^2 - b \times (-1) + c = 0 \\ 3^2 - 3b + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解方程组得} \begin{cases} b = 2 \\ c = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$,

$$\therefore y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4,$$

$\therefore$ 顶点 D 的坐标为 $(1, -4)$.

(2) 设直线 BD 的解析式为 $y = kx + b$,

$\because B(3, 0)$, $D(1, -4)$,

$$\therefore \begin{cases} 3k + b = 0 \\ k + b = -4 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = 2 \\ b = -6 \end{cases},$$

$\therefore BD: y = 2x - 6$,

设 P 点的坐标为 (m, n) ,

$\because$ 点 P 为线段 BD 上一动点, 且不与 B 、 D 重合,

$\therefore P(m, 2m - 6) (1 < m < 3)$,

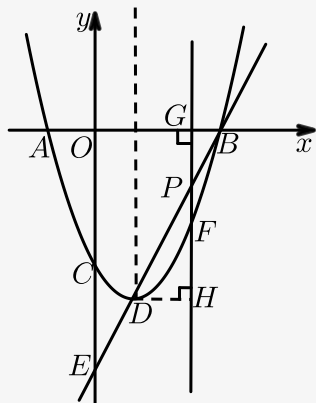
$\because$ 点 F 是过点 P 作 x 轴垂线与抛物线的交点,

$\therefore F(m, m^2 - 2m - 3)$,

又 $\because$ 点 P 在 F 上方,

$$\therefore PF = 2m - 6 - (m^2 - 2m - 3) = -m^2 + 4m - 3,$$

设直线 PF 交 x 轴于点 G , 过点 D 作 $DH \perp PF$ 于点 H ,



$$\begin{aligned}
&\because S_{\triangle BDF} = S_{\triangle PDF} + S_{\triangle PBF} \\
&= \frac{1}{2}PF \cdot DH + \frac{1}{2}PF \cdot BG \\
&= \frac{1}{2}PF \cdot (DH + BG) \\
&= \frac{1}{2} \times (-m^2 + 4m - 3) \times (3 - 1) \\
&= -m^2 + 4m - 3 \\
&= -(m - 2)^2 + 1.
\end{aligned}$$

$\therefore S_{\triangle BDF}$ 是关于 m 的二次函数,

$$\therefore a = -1 < 0,$$

$\therefore$ 当 $m = 2$ 时, $\triangle BDF$ 面积取最大值, 最大值为 1.

(3) 点 Q 的坐标为 $\left(\frac{9}{7}, -\frac{24}{7}\right)$, 连接 BC 、 CD ,

$$B(3, 0), C(0, -3), D(1, -4),$$

根据勾股定理可得 $BC^2 = 3^2 + 3^2 = 18$,

$$CD^2 = 1^2 + 1^2 = 2,$$

$$BD^2 = 2^2 + 4^2 = 20,$$

$$\therefore BD^2 = BC^2 + CD^2,$$

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ,$$

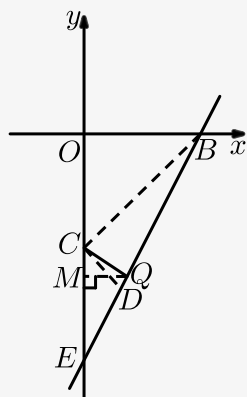
$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BCD \text{ 中}, \tan \angle BDC = \frac{BC}{CD} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = 3,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle QCE,$$

$$\therefore \tan \angle QCE = 3,$$

设点 Q 的坐标为 $(n, 2n - 6)$,

过点 Q 作 $QM \perp CE$ 于点 M ,



在 $\text{Rt}\triangle CMQ$ 中,

$$\tan \angle MCQ = \frac{QM}{MC} = \frac{n}{3 - 2n} = 3,$$

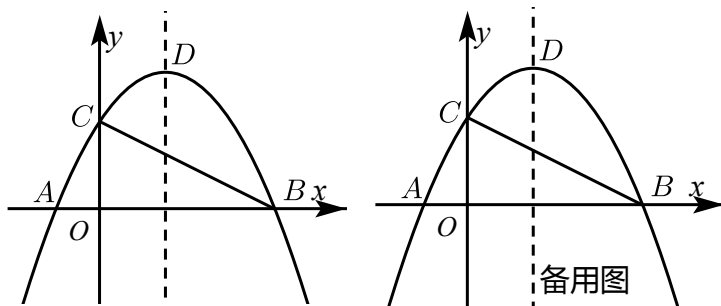
$$\text{解得 } n = \frac{9}{7},$$

$$\therefore 2n - 6 = -\frac{24}{7},$$

$$\therefore \text{点} Q \text{坐标为} \left(\frac{9}{7}, -\frac{24}{7} \right).$$

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

9. 如图平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 - 3ax - 4a$ 的图象经过点 $C(0, 2)$ ，交 x 轴于点 A, B (A 点在 B 点的左侧)，顶点为 D 。



- (1) 求抛物线的解析式和点 A, B 的坐标。
- (2) 将三角形 ABC 沿着直线 BC 对折，点 A 的对称点为 A' ，试着求 A' 的坐标。
- (3) 抛物线的对称轴上是否存在点 P ，使得 $\angle BPC = \angle BAC$ ？若存在，求出点 P 的坐标，若不存在，请说明理由。

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ ； $A(-1, 0)$ ， $B(4, 0)$ 。

(2) $A'(1, 4)$ 。

(3) 存在； P 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2}, 2 + \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$ 。

【解析】(1) 把 $(0, 2)$ 代入 $y = ax^2 - 3ax - 4a$ 得 $-4a = 2$ ，

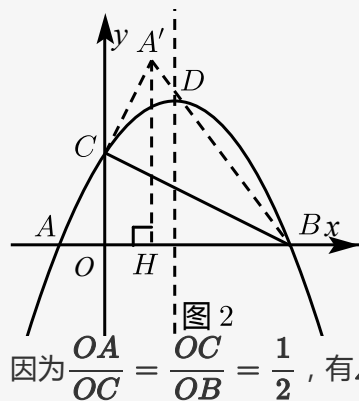
$$\text{解得 } a = -\frac{1}{2},$$

$$\text{所以抛物线的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2,$$

$$\text{令 } -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0, \text{ 可得: } x_1 = -1, x_2 = 4,$$

$$\text{所以 } A(-1, 0), B(4, 0).$$

(2) 如图2，作 $A'H \perp x$ 轴于 H ，



所以 $\triangle AOC \sim \triangle COB$,

所以 $\angle ACO = \angle CBO$, 可得 $\angle ACB = \angle OBC + \angle BCO = 90^\circ$,

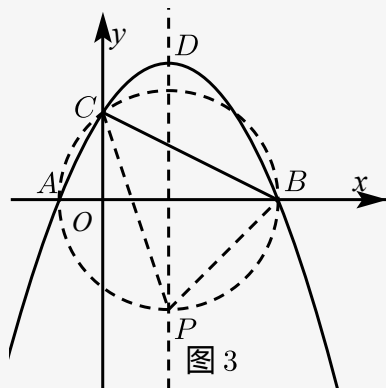
由 $A'H // OC$, $AC = A'C$ 得 $OH = OA = 1$,

$A'H = 2OC = 4$.

所以 $A'(1, 4)$.

(3) 分两种情况:

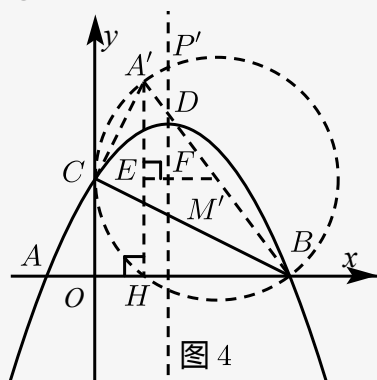
① 如图3, 以 AB 为直径作 $\odot M$, $\odot M$ 交抛物线的对称轴于 P (BC 的下方),



由圆周角定理得 $\angle CPB = \angle CAB$,

易得: $MP = \frac{1}{2}AB$, 所以 $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

② 如图4, 类比第(2)小题的背景将 $\triangle ABC$ 沿直线 BC 对折,



点 A 的对称点 A' , 以 $A'B$ 为直径作 $\odot M'$, $\odot M'$ 交抛物线的对称轴于 P' (BC 的上方),

则 $\angle CP_2B = \angle CA'B = \angle CAB$.

作 $M'E \perp A'H$ 于 E , 交对称轴于 F ,

则 $M'E = \frac{1}{2}BH = \frac{3}{2}$, $EF = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$,

所以 $M'F = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$.

在 $Rt\triangle M'P'F$ 中,

所以 $P'M = 2 + \frac{\sqrt{21}}{2}$,

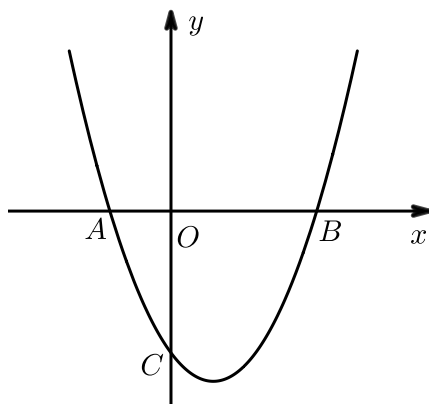
所以 $P'\left(\frac{3}{2}, 2 + \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$.

综上所述， P 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2}, 2 + \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$ 。

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

三、和差角问题

10. 如图，已知抛物线 C_1 的顶点为 $E\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ ，与 x 轴交于点 A 、 B （点 A 在点 B 左侧），与 y 轴交于点 $C(0, -2)$ 。



- (1) 求抛物线 C_1 的解析式。
 (2) 点 D 是抛物线 C_1 上一点，且 $\angle ACO + \angle BCD = 45^\circ$ ，求点 D 的坐标。

【答案】(1) $y = x^2 - x - 2$ 。

(2) $D_1(3, 4)$ ， $D_2\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ 。

【解析】(1) 设 $C_1: y = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ ，

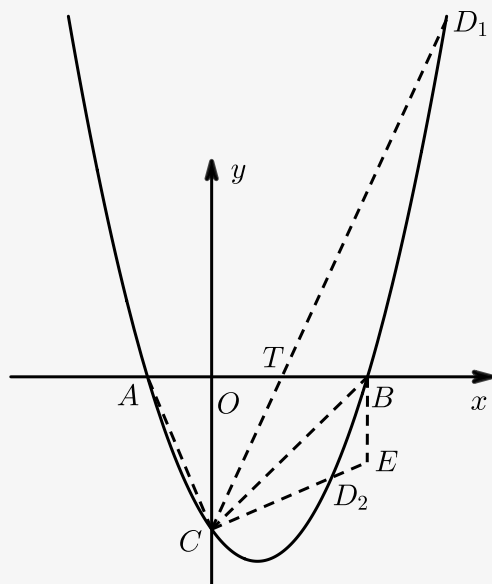
过 $C(0, -2)$ ，

$$\therefore \frac{1}{4}a - \frac{9}{4} = -2,$$

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = x^2 - x - 2.$$

(2) 如图，



由(1) , $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, -2)$,

$$\therefore OB = OC ,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle ACO + \angle BCD = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle BCD = 45^\circ - \angle ACO ,$$

在 OB 上取 $OT = OA = 1$,

$$\text{则 } \angle ACO = \angle TCO ,$$

$$\therefore \angle ACO + \angle BCT = 45^\circ ,$$

可见 CT 延长线与抛物线交于 D , 记为 D_1 ,

$$\therefore C(0, -2) , T(1, 0) ,$$

$$\therefore CT : y = 2x - 2 ,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = x^2 - x - 2 \end{cases} ,$$

$$\therefore x^2 - 3x = 0 ,$$

$$x_1 = 0 , x_2 = 3 ,$$

$$\therefore D_1(3, 4) ,$$

过 B 作 $BE \perp x$ 轴于 E 使 $BE = BT = 1$,

$$\text{则 } \angle TBC = \angle EBC = 45^\circ ,$$

$$\triangle TBC \cong \triangle EBC (\text{SAS}) ,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle BCD_1 ,$$

$\therefore CE$ 与抛物线交于 D , 记为 D_2 ,

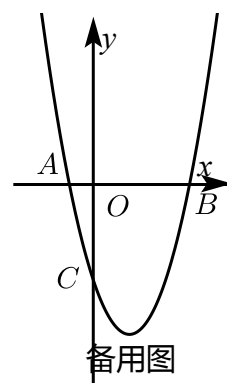
$$\therefore E(2, -1) , C(0, -2) ,$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2}x - 2 ,$$

$$\begin{aligned} & \text{联立} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ y = x^2 - x - 2 \end{cases}, \\ & x^2 - \frac{3}{2}x = 0, \\ & x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2}, \\ & D_2\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right), \\ & \text{综上 } D_1(3, 4), D_2\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right). \end{aligned}$$

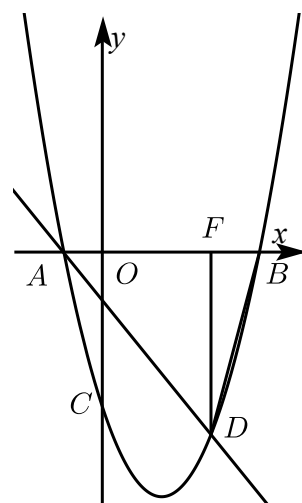
【标注】【知识点】二次函数与角度问题

11. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过 $A(-1, 0)$ ， $B(6, 0)$ ， $C(0, -6)$ 。



(1) 求该抛物线的解析式。

(2) 过 D 作 $DF \perp AB$ 于 F ，连结 BD ，点 G 是抛物线上一点，使 $\angle DAG + \angle BDF = \angle BAD$ ，若存在这样的 G 点，请直接写出点 G 坐标，若不存在，请说明理由。



【答案】(1) $y = x^2 - 5x - 6$ 。

(2) 存在， $G(5, -1)$ 。

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

四、倍半角问题

12. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 - 4ax + 3a (a > 0)$ 与 x 轴交于 A, B 两点（ A 点在 B 点左侧），与 y 轴交于点 C 。

(1) 如图1，当 $OC = \frac{3}{2}$ 时。

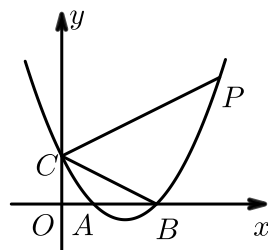


图1

① 求抛物线的表达式。

② 点 P 为 B 点右侧抛物线上一点，连接 PC ，若 $\angle BCP = 2\angle ABC$ ，求点 P 的坐标。

【答案】 (1) ① $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ 。

② $P(5, 4)$ 。

【解析】 (1) ① 令 $y = ax^2 - 4ax + 3a = 0$ ，解得： $x = 1$ 或 3 ，令 $x = 0$ ，则 $y = 3a$ ，

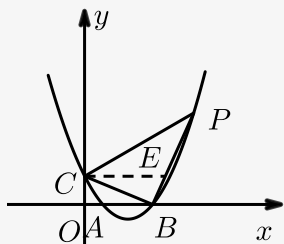
则点 A, B, C 的坐标分别为 $(1, 0)$ 、 $(3, 0)$ 、 $(0, 3a)$ ，

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times OC = \frac{1}{2} \times 2 \times 3a = \frac{3}{2}, \text{ 解得: } a = \frac{1}{2},$$

故抛物线的表达式为： $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ ①。

故答案为： $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ 。

② 如图，过点 C 作 $CE \parallel x$ 轴交直线 BP 于点 E ，



图①

$$\therefore \angle ABC = \angle ECB = \frac{1}{2} \angle PCB, \text{ 而 } \angle BCP = 2\angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ECB = \angle PCE = \alpha,$$

$$\tan \angle ABC = \frac{OC}{OB} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} = \tan \alpha,$$

则直线 PC 的表达式为： $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ②，

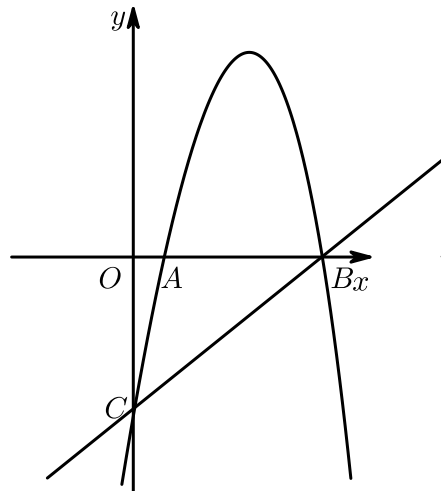
①②联立并解得： $x = 5$ 或 0 （舍去 0 ），

故点 $P(5, 4)$ 。

故答案为： $P(5, 4)$ 。

【标注】【知识点】二次函数与角度问题

13. 如图，抛物线 $y = ax^2 + 6x + c$ 交 x 轴于 A, B 两点，交 y 轴于点 C 。直线 $y = x - 5$ 经过点 B, C 。

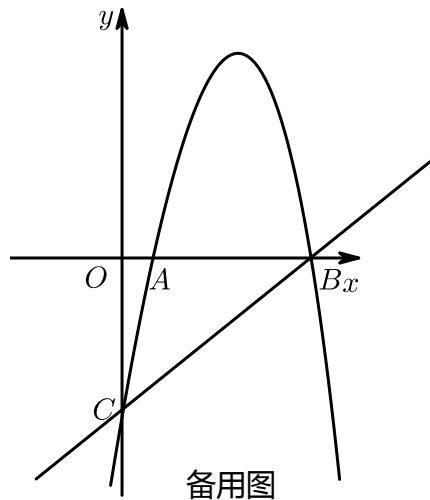


(1) 求抛物线的解析式。

(2) 过点 A 的直线交直线 BC 于点 M 。

① 当 $AM \perp BC$ 时，过抛物线上一动点 P （不与点 B, C 重合），作直线 AM 的平行线交直线 BC 于点 Q ，若以点 A, M, P, Q 为顶点的四边形是平行四边形，求点 P 的横坐标。

② 连接 AC ，当直线 AM 与直线 BC 的夹角等于 $\angle ACB$ 的2倍时，请直接写出点 M 的坐标。



【答案】 (1) 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 6x - 5$ 。

- (2) ① P 点的横坐标为4或 $\frac{5+\sqrt{41}}{2}$ 或 $\frac{5-\sqrt{41}}{2}$.
 ② 点 M 的坐标为 $(\frac{13}{6}, -\frac{17}{6})$ 或 $(\frac{23}{6}, -\frac{7}{6})$.

【解析】(1) 当 $x=0$ 时, $y=x-5=-5$, 则 $C(0, -5)$,

当 $y=0$ 时, $x-5=0$, 解得 $x=5$, 则 $B(5, 0)$,

把 $B(5, 0)$, $C(0, -5)$ 代入 $y=ax^2+6x+c$ 得 $\begin{cases} 25a+30+c=0 \\ c=-5 \end{cases}$, 解得

$$\begin{cases} a=-1 \\ c=-5 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-x^2+6x-5$.

- (2) ① 解方程 $-x^2+6x-5=0$ 得 $x_1=1, x_2=5$, 则 $A(1, 0)$,

$\therefore B(5, 0), C(0, -5)$,

$\therefore \triangle OCB$ 为等腰直角三角形,

$\therefore \angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$,

$\therefore AM \perp BC$,

$\therefore \triangle AMB$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore AM = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4 = 2\sqrt{2},$$

$\therefore$ 以点 A, M, P, Q 为顶点的四边形是平行四边形,

$AM \parallel PQ$,

$\therefore PQ = AM = 2\sqrt{2}, PQ \perp BC$,

作 $PD \perp x$ 轴交直线 BC 于 D , 如图1, 则 $\angle PDQ = 45^\circ$,

$$\therefore PD = \sqrt{2}PQ = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4,$$

设 $P(m, -m^2+6m-5)$, 则 $D(m, m-5)$,

当 P 点在直线 BC 上方时,

$$PD = -m^2+6m-5 - (m-5) = -m^2+5m = 4, \text{解得 } m_1 = 1,$$

$$m_2 = 4,$$

当 P 点在直线 BC 下方时,

$$PD = m-5 - (-m^2+6m-5) = m^2-5m = 4, \text{解得 } m_1 = \frac{5+\sqrt{41}}{2}$$

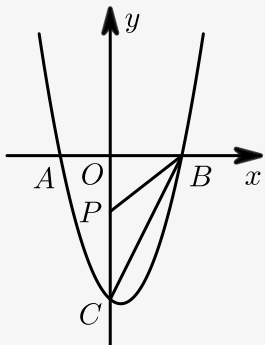
$$, m_2 = \frac{5-\sqrt{41}}{2},$$

综上所述, P 点的横坐标为4或 $\frac{5+\sqrt{41}}{2}$ 或 $\frac{5-\sqrt{41}}{2}$.

$$\therefore m = -2,$$

$$\therefore y = (x-3)(x+2) = x^2 - x - 6.$$

(2) ① 令 $x = 0$, 则 $y = -6$,



$$\therefore C(0, -6),$$

$$\text{设 } P(0, n), \text{ 则 } OP = -n, PC = n + 6,$$

$$\therefore \angle BPO = 2\angle BCO = \angle BCO + \angle PBC,$$

$$\therefore \angle BCO = \angle PBC,$$

$$\therefore BP = PC = n + 6,$$

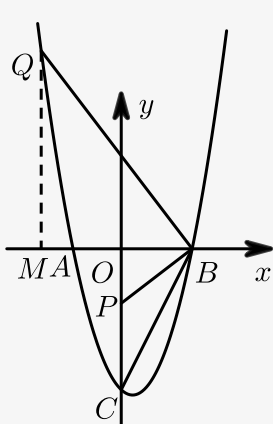
$$\text{又 } \because OP^2 + OB^2 = BP^2,$$

$$\therefore (-n)^2 + 3^2 = (n+6)^2,$$

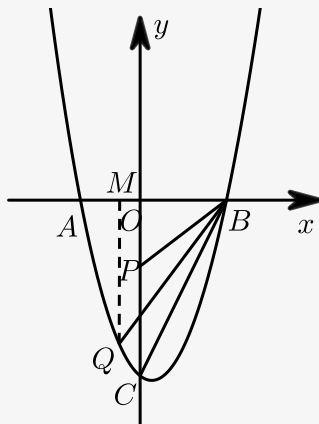
$$\therefore n = -\frac{9}{4},$$

$$\therefore P\left(0, -\frac{9}{4}\right).$$

② 设 $Q(x, x^2 - x - 6)$, 过点 Q 作 $QM \perp x$ 轴于点 M ,



Q 在 x 轴上方



Q 在 x 轴下方

$$\therefore \angle QBA = 2\angle BCO, \angle BPO = 2\angle BCO,$$

$$\therefore \angle QBA = \angle BPO,$$

$$\text{又 } \because \angle BMQ = \angle BOP = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BQM \sim \triangle PBO,$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{QM}{OB} &= \frac{BM}{OP}, \\ \text{即: } \frac{x^2 - x - 6}{3} &= \frac{3 - x}{\frac{9}{4}} \text{ 或 } \frac{-x^2 + x + 6}{3} = \frac{3 - x}{\frac{9}{4}}, \\ \therefore x_1 &= 3, x_2 = -\frac{10}{3} \text{ 或 } x_1 = 3, x_2 = -\frac{2}{3}. \\ \therefore Q &\left(-\frac{10}{3}, \frac{76}{9}\right) \text{ 或 } Q\left(-\frac{2}{3}, -\frac{44}{9}\right). \end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次函数与角度问题